Arithmetik und Algebra

Maßeinheiten

Längenmaße	1 km	= 1000 m				
			1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1000 mm
			1 dm	= 10 cm	= 100 mm	
			1 cm	= 10 mm		
	1 mm	= 0,1 cm	1 cm	= 0,1 dm	1 m	= 0,001 km
Flächenmaße	1 m^2	= 100 dm^2	1 dm^2	= 100 cm^2	1 cm^2	= 100 mm^2
	1 km^2	= 100 ha	1 ha	= 100 a	1 a	= 100 m^2
Raummaße	1 dm^3	= 1 l	1 hl	= 100 l	1 cm^3	= 1 ml
	1 m^3	= 1000 dm^3	1 dm^3	= 1000 cm^3	1 cm^3	= 1000 mm^3
	1 l	= 10 dl	1 l	= 100 cl	1 l	= 1000 ml
Gewichte	1 t	= 1000 kg	1 kg	= 1000 g	1 g	= 1000 mg
	1 dt	= 100 kg	1 t	= 10 dt	1 dt	= 0,1 t
Zeitmaße	1 Tag	= 24 h	1 h	= 60 min	1 min	= 60 s

Schriftliche Division

Ich beginne bei den Zehntausendern
Wie oft passt 6 in die 3?
0-mal. Ich schreibe 0.
Wie oft passt 6 in 32?

```
ZT T H Z E          ZT T H Z E
 3 2 2 9 8 : 6 =  0 5 3 8 3
 0 ↓ │ │ │
 3 2 │ │ │
 3 0 ↓ │ │
   2 2 │ │
   1 8 ↓ │
     4 9 │
     4 8 ↓
       1 8
       1 8
         0
```

Probe durch die Multiplikation

```
8 7 5 € : 5 = 1 7 5 €
5
3 7
3 5
  2 5
  2 5
    0
```

Ich dividiere den Euro-Betrag. Wenn ich an das Komma gelange, dann setze ich es auch gleich im Ergebnis ein.

Schriftliche Division

```
      H Z E     H Z E
      1 2 7 ·   3 6 5
            ZT T H Z E
   ~~2~~      3 8 1 0 0
~~1~~ ~~4~~        7 6 2 0
~~1~~ ~~3~~          6 3 5
      1 1
      4 6 3 5 5
```

Ich rechne zuerst die Hunderter-Aufgabe, dann die Zehner-Aufgabe und die Einer-Aufgabe Dann addiere ich.

25,80€ · 14 = 361,20€

In der Aufgabe sind zwei Stellen hinter dem Komma, deshalb muss das Ergebnis auch Stellen hinter dem Komma haben.

73895.indd 142 08/05/2018 10:40

Arithmetik und Algebra

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)	**Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz)**
$15 + 3 = 3 + 15$ $15 \cdot 3 = 3 \cdot 15$	$(15 + 3) + 4 = 15 + (3 + 4)$ $(15 \cdot 3) \cdot 4 = 15 \cdot (3 \cdot 4)$

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)

$(3 + 5) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 6 + 10 = 16$

$(100 - 3) \cdot 7 = 100 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = 700 - 21 = 679$

Klammerrechnung geht vor Punktrechnung	**Punktrechnung geht vor Strichrechnung**
$5 \cdot (3a - 2a) = 5 \cdot a = 5a$	$25 - 3 \cdot 7 = 25 - 21 = 4$

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Potenzgesetze

Für $m, n \in \mathbb{R}$ bei Basen aus $\mathbb{R}^+$ bzw. für $m, n \in \mathbb{Z}$ bei Basen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n : b^n = (a : b)^n$	$(a^m)^m = a^{m \cdot n}$	$a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Wurzelgesetze für a, b ≥ 0

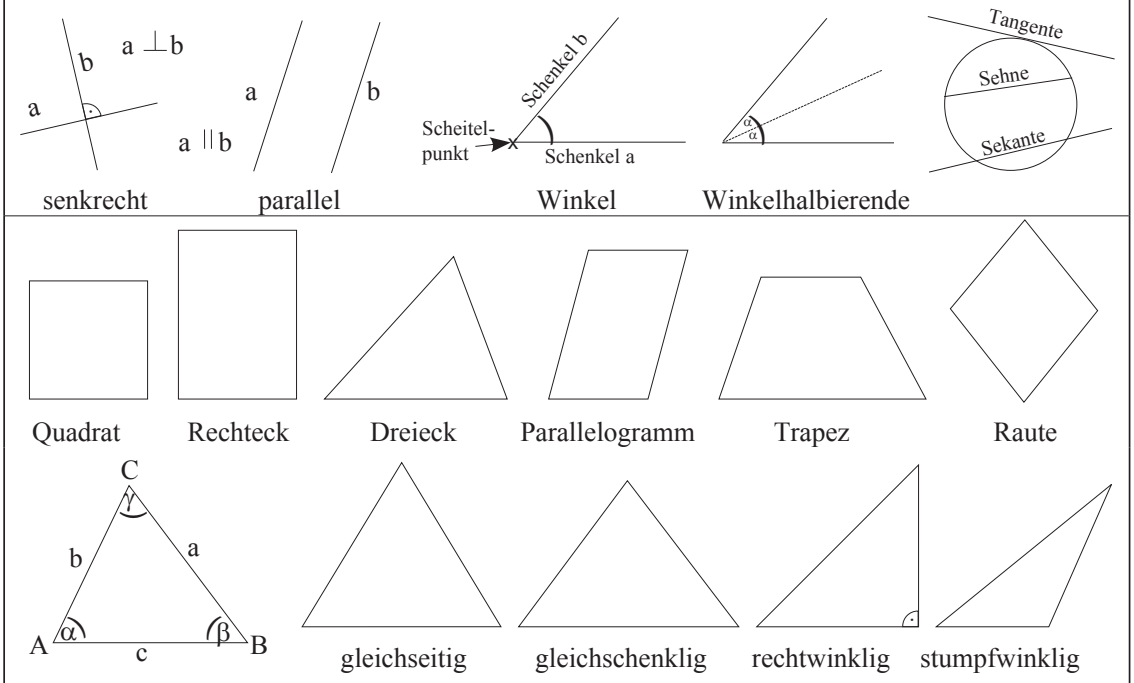
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b > 0)$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ $= \sqrt[m \cdot n]{a}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Quadratische Gleichungen

Normalform:	Losung:
$x^2 + p \cdot x + q = 0$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$; wenn $(\frac{p}{2})^2 - q \geq 0$, sonst keine Lösung

73895.indd 143 08/05/2018 10:40

Geometrische Bezeichnungen



Zentrische Streckung und Ähnlichkeitsbeziehungen

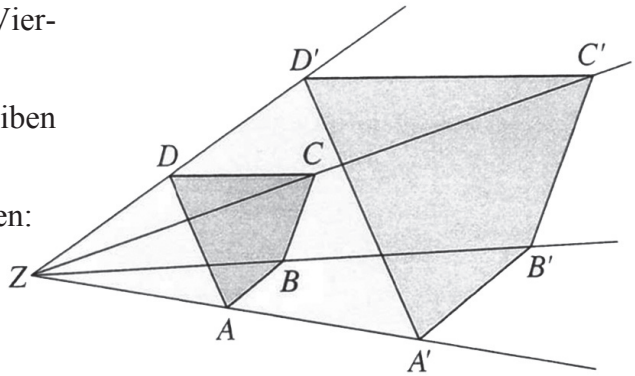
Wird das Viereck $ABCD$ (Original) bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckungszentrum Z und dem Streckungsfaktor k ($k \neq 0$) auf das Viereck $A'B'C'D'$ (Bild) abgebildet, dann sind beide Vierecke zueinander ähnlich.

Bei einer zentrischen Streckung bleiben die Winkelgrößen erhalten.

Folgende Streckenverhältnisse gelten:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'D'}} \quad \text{usw.}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{k}$$



73895.indd 144 08/05/2018 10:40

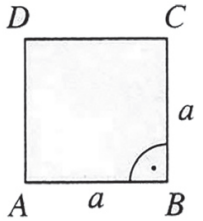
Geometrie

Ebene Figuren (A: Flächeninhalt u: Umfang)

Quadrat

$A = a^2$

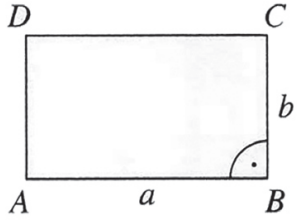
$u = 4 \cdot a$



Rechteck

$A = a \cdot b$

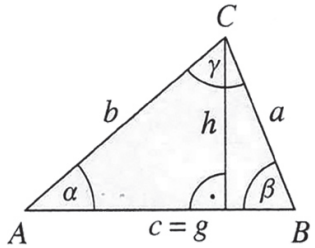
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



Dreieck

$A = \frac{g \cdot h}{2}$

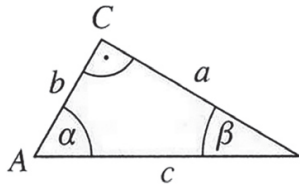
$u = a + b + c$



Satz des Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$a^2 + b^2 = c^2$



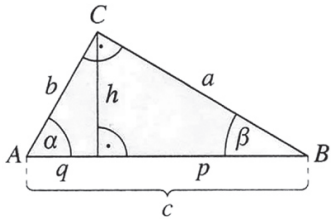
Höhen- und Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$h^2 = p \cdot q$

$a^2 = c \cdot p$

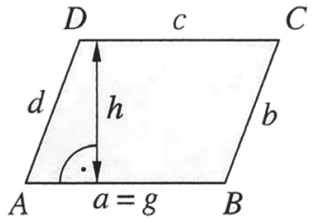
$b^2 = c \cdot q$



Parallelogramm

$A = g \cdot h$

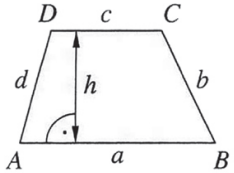
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



Trapez

$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

$u = a + b + c + d$

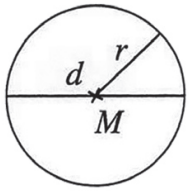


Kreis

$d = 2 \cdot r$

$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$

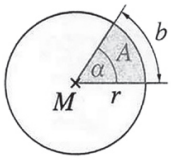
$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$



Kreissektor und Kreisbogen

$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$

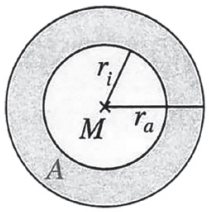
$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°}$



Kreisring

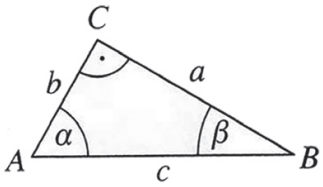
$A = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$

Den Flächeninhalt eines Kreisrings erhält man, indem man den Flächeninhalt des inneren Kreises A_i vom Flächeninhalt des äußeren Kreises A_a subtrahiert.



Trigonometrie (im rechtwinkligen Dreieck)

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:



$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von a}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von a}}$

73895.indd 145 08/05/2018 10:41

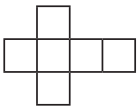
Geometrie

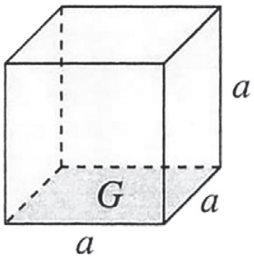
Körper *(V*: Volumen *O*: Oberfläche *G*: Grundfläche *M*: Mantelfläche)

Würfel

$V = a^3$

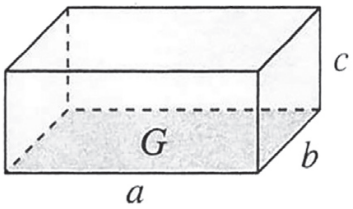
$O = 6 \cdot a^2$





Quader

$V = a \cdot b \cdot c$

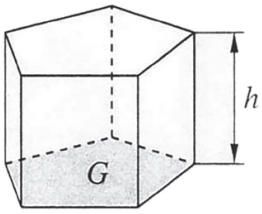


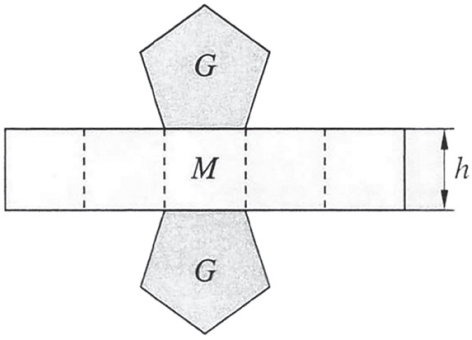
$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

Prisma

$V = G \cdot h$

$O = 2 \cdot G + M$

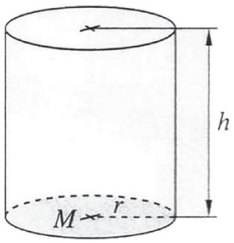




Zylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

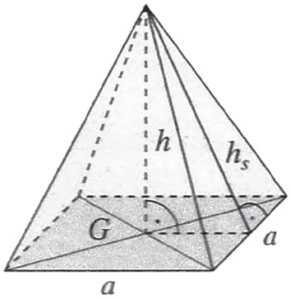
$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Quadratische Pyramide

$V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$

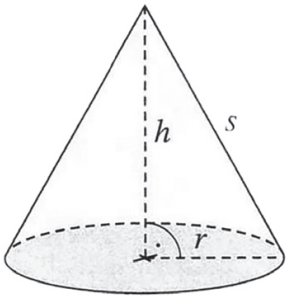
$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_s$



Kegel

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

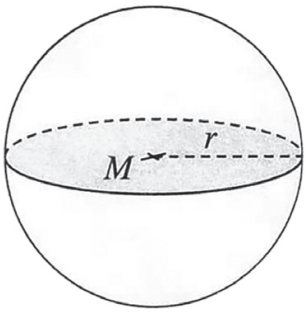
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$



Kugel

$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



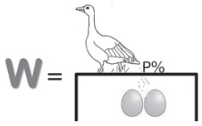
73895.indd 146 08/05/2018 10:41

Prozent und Zinsrechnung

Prozentrechnung

G: Grundwert
W: Prozentwert
P%: Prozentsatz

$$W = \frac{G \cdot p}{100} \qquad p = \frac{W \cdot 100}{G} \qquad G = \frac{W \cdot 100}{p}$$



Zinsrechnung

Jahreszinsen

$$Z = \frac{K \cdot p}{100}$$

Monatszinsen

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100 \cdot 12}$$

Tageszins

$$Z = \frac{K \cdot i \cdot p}{100 \cdot 360}$$

Zinseszinsen (exponentielles Wachstum)

K_0: Kapital am Anfang
K_n: Kapital nach n Jahren
n: Zeit in Jahren
p%: Zinssatz in Prozent
Z: Zinsen
K: Kapital

Zinsfaktor $q = \frac{100 + p}{100}$

Kapital nach n Jahren

$$K_n = K_o \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

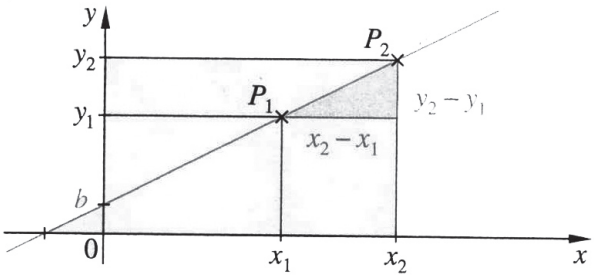
Funktionen

Lineare Funktionen

m: Steigung der Geraden g durch die Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

b: *y*-Achsenabschnitt



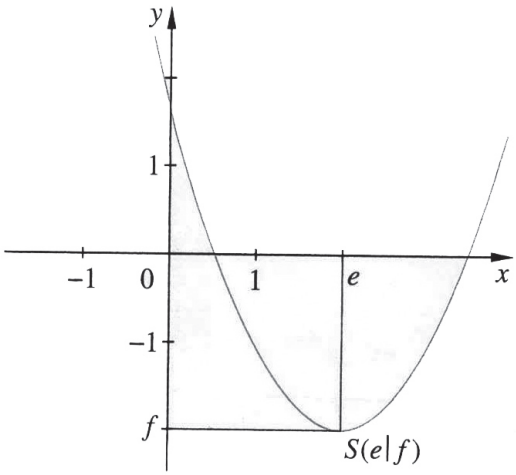
$y = mx + b$

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $(a \neq 0)$

Scheitelpunktform: $y = (x + e)^2 + f$

$S(e|f)$ ist der Scheitelpunkt.



73895.indd 147 08/05/2018 10:41

Proportionale Zuordnung:

Multipliziert man die eine Größe mit einer Zahl, muss man die andere Größe mit der gleichen Zahl multiplizieren.

Dividiert man die eine Größe durch eine Zahl, muss man die andere Größe durch die gleiche Zahl dividieren.

	Schokolade (in g)	Fett (in g)	
	100	38	
: 100			: 100
	$\cdot 1$	$\frac{38}{100}$	
$\cdot$ 150			$\cdot$ 150
	150	$150 \cdot \frac{38}{100} = 57$	

Antiproportionale Zuordnung:

Dividiert man die eine Größe durch eine Zahl, muss man die andere Größe mit der gleichen Zahl multiplizieren.

Multipliziert man die eine Größe mit einer Zahl, muss man die andere Größe durch die gleiche Zahl dividieren.

	Anzahl der Fische	Anzahl der Tage	
	28	15	
: 28			$\cdot$ 28
	1	420	
$\cdot$ 35			: 35
	35	12	

73895.indd 148 08/05/2018 10:41

Daten auswerten und darstellen

Absolute und relative Häufigkeiten

Die **absolute Häufigkeit** gibt eine Anzahl an. Die **relative Häufigkeit** ist ein Anteil.

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Beispiel absolute Häufigkeiten:

Lieblingsfarbe	Rot	Gelb	Grün	Blau	Gesamtzahl
Anzahl	8	2	10	20	40

Relative Häufigkeit für Lieblingsfarbe rot $= \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 20\%$

Durchschnitt (arithmetisches Mittel)

Der Durchschnitt gibt einen Mittelwert einer Datenreihe an.

$$\text{Durchschnitt} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl de Werte}}$$

Gegeben: 1,62m; 1,47m; 1,60m, 1,66m; 1,55m

Formel: $\text{Durchschnitt} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl de Werte}}$

Rechnung: $\frac{1{,}62 + 1{,}47 + 1{,}60 + 1{,}66 + 1{,}55}{5}$

$= \frac{7{,}90}{5}\ 1{,}58$

Antwort: Der Durchschnitt der gegebenen Datenreihe beträgt 1,58m.

Zentralwert (Median)

Sind alle Daten der Größe nach geordnet, heißt der in der Mitte stehende Wert **Zentralwert**. Bei einer geraden Anzahl von Daten liegen zwei Werte in der Mitte. Dann ist der Zentralwert der Durchschnitt aus diesen beiden Werten.

Gegeben: 1,62m; 1,47m; 1,60m; 1,66m

Geordnete Datenreihe:

1,47m; 1,60m; 1,62m; 1,66m

$\frac{1{,}60 + 1{,}62}{2} = 1{,}61$

Antwort: Der Zentralwert der gegebenen Datenreihe beträgt 1,61m.

Streifendiagramm

100% ≙ Streifenlänge insgesamt (hier 10cm)

1% ≙ $\frac{1}{100}$ der Streifenlänge (hier 0,1cm)

35%	

$p\%$ ≙ $p \cdot 0{,}1$cm

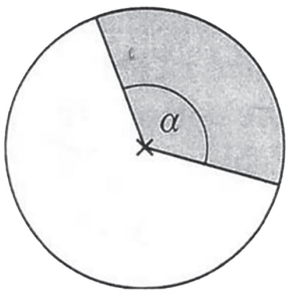
35% ≙ $35 \cdot 0{,}1$cm

35% ≙ 3,5cm

Kreisdiagramm

100% ≙ 360°

1% ≙ 3,6°



$p\%$ ≙ $p \cdot 3{,}6°$

35% ≙ $35 \cdot 3{,}6° = 126°$

73895.indd 149 08/05/2018 10:41

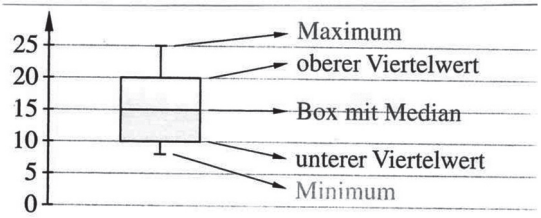
Boxplots

Boxplots sind spezielle Diagramme, die bestimmte Kennwerte und die Verteilung der Daten auf einen Blick zeigen. Mit ihnen können große Datenmengen dargestellt und verglichen werden.

Um einen **Boxplot** zu zeichnen, benötigt man fünf besondere Werte:

– **Minimum, Maximum** und **Median**
– Median der unteren Datenhälfte (**unterer Viertelwert** oder unteres Quartil)
– Median der oberen Datenhälfte (**oberer Viertelwert** oder oberes Quartil)

Zwischen unterem und oberem Viertelwert wird eine Box gezeichnet.



Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten berechnen (Laplace-Versuche)

Jedes Zufallsexperiment hat mögliche **Ergebnisse**.

Mehrere Ergebnisse können zu einem **Ereignis** zusammengefasst werden.

Sind alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich,
so gilt für die **Wahrscheinlichkeit *P*** für das Eintreten eines Ereignisses:

$$\text{Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, die zum Ereignis gehören}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel Wahrscheinlichkeit eine ungerade Zahl zu würfeln:
6 mögliche Ergebnisse: {1; 2; 3; 4; 5; 6}
3 Ergebnisse, die zu dem Ereignis „ungerade Zahl“ gehören: {1; 3; 5}
Wahrscheinlichkeit *P* (ungerade Zahl) $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

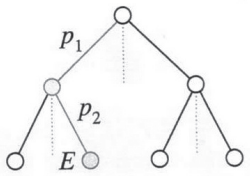
Mehrstufige Zufallsversuche

Bei einem mehrstufigen Zufallsversuch laufen mehrereTeilexperimente nacheinander oder nebeneinander ab. Zur Darstellung von mehrstufigen Zufallsversuchen eignen sich Baumdiagramme. Jedes Ergebnis entspricht darin genau einem Pfad.
Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mithilfe von Produkt- und Summenregel berechnen.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.

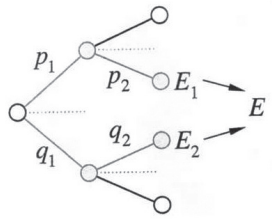
$P(E) = p_1 \cdot p_2$



2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$
$= p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$



73895.indd 150 08/05/2018 10:41